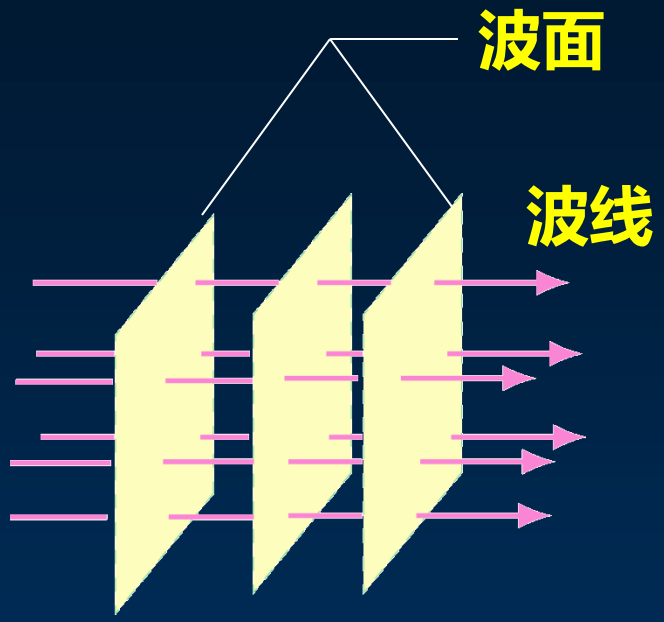
二、波动的基本描述

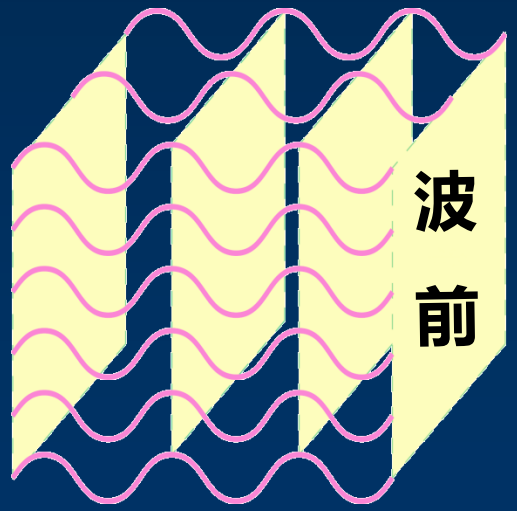
1. 波线，波面和波前

当波在连续媒质中由波源向外传播时，沿波的传播方向作的有向直线 —— **波线**

在波传播过程中，任一时刻媒质中各振动相位相同的点联结成的空间曲面 —— **波阵面（波面）**

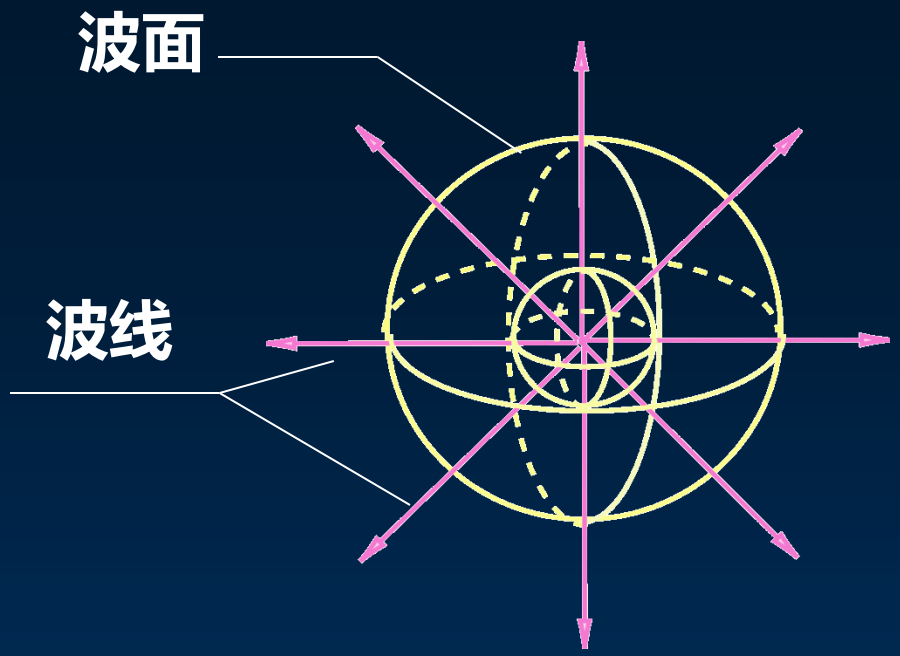
在某一时刻，波传播到的最前面的波面 —— **波前**



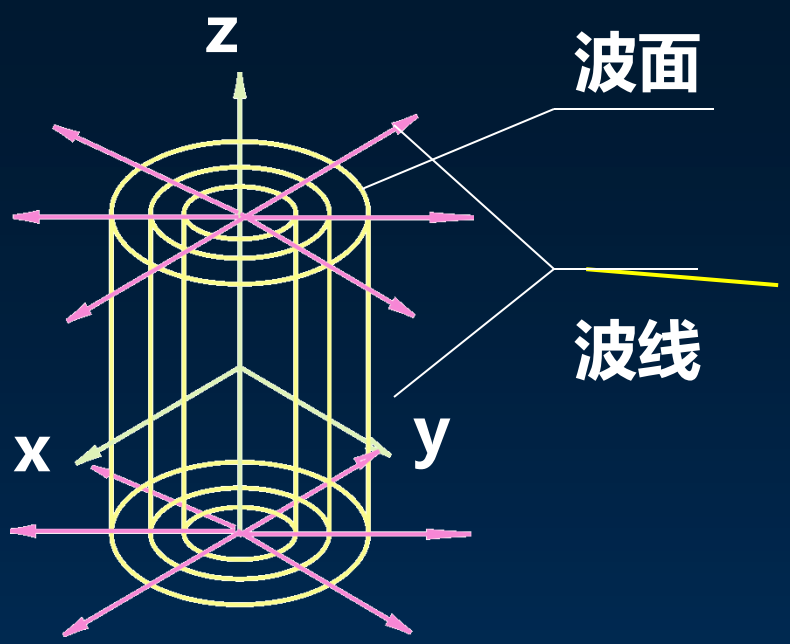


2. 平面波，球面波，柱面波

- **平面波** —— 波阵面为平面
- **球面波** —— 波阵面为球面
- **柱面波** —— 波阵面为柱面



球面波



柱面波

说明： • 波动过程，可视为波面向前推进的过程；

• 在各向同性媒质中，波线处处与波阵面垂直。

3. 波长、周期（频率）、波速

波长(λ) 同一波线上相邻两个同相点间的距离或波源作一次完全振动，波前进的距离。

波长反映了波的空间周期性。

周期(T) 波前进一个波长距离所需的时间。

频率 (ν) 单位时间内，波前进距离中完整波的数目：$\nu = \frac{1}{T}$

角频率 (ω) 2π 时间内，波前进距离中完整波的数目：$\omega = 2\pi\nu$

周期、频率都表征了波的时间周期性。

注意： 波的周期和频率与波源的振动的周期和频率相同，与媒质的性质无关。

波速(u) 振动状态在媒质中的传播速度。

$$u = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda$$

注意： 1）波速实质上是相位传播的速度，故也称相速度；其大小主要决定于媒质性质，与波的频率无关。

2）因为 $\lambda = uT$，波长不仅与媒质性质有关，而且与波源有关。

拉紧的绳子或弦线上横波的波速为

$$u_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T— 张力

μ— 线密度

均匀细棒中，纵波的波速为

$$u_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Y— 固体棒的杨氏模量

ρ— 固体棒的密度

固体媒质中传播的横波速率为

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G — 固体的切变弹性模量

ρ — 固体密度

液体和气体中的纵波波速为

$$u_l = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

B — 流体的容变弹性模量

ρ — 流体的密度

稀薄大气中的纵波波速为

$$u_l = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

γ — 气体摩尔热容比

M— 气体摩尔质量

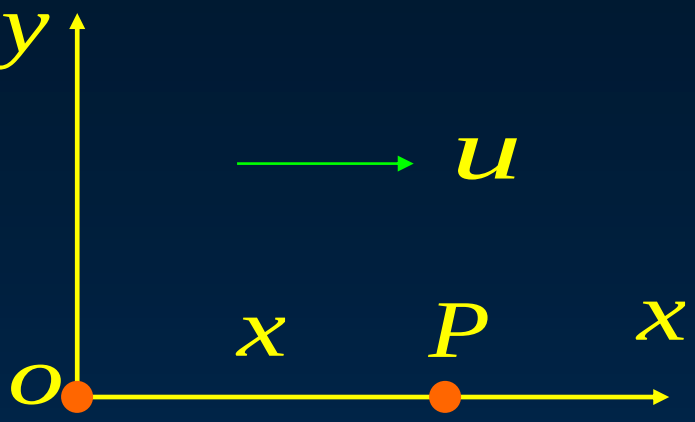
R — 气体摩尔常数

14-2 平面简谐波

一、平面行波

已知位于坐标原点的质元振动规律：

$$y_o = f(t)$$



t 时刻，x 处质元的振动状态与 $t-\dfrac{x}{u}$ 时刻原点质元的振动状态相同。

t 时刻，x 处质元的振动规律为

$$y = f(t-\frac{x}{u}) = f(x,t)$$

二、平面简谐波

若传播谐振动状态，波所到之处，媒质中各质点都做同频率、同振幅谐振动，则该波动称为简谐波（余弦或正弦波）。

任何复杂的波都可以分解为一系列简谐波的叠加。☆

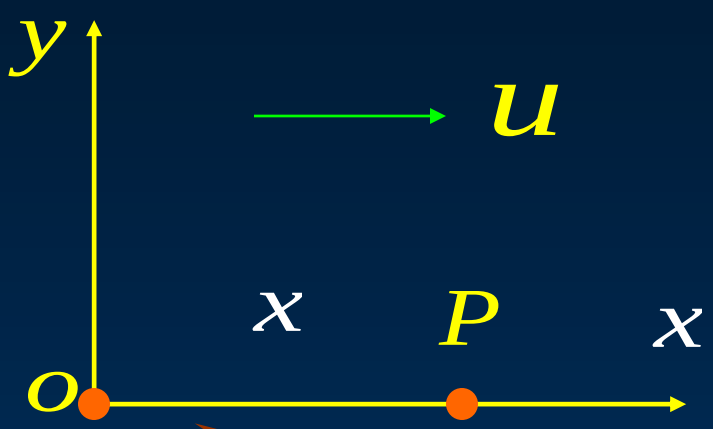
平面简谐波 —— 波面为平面的简谐波称为平面简谐波

（在无吸收、各向同性、无限大均匀媒质中传播）

1. 平面简谐波的波函数

O 点质元的振动方程：

$$y_o = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



- 从传播时间分析：

P 点质元的振动方程：

$$y_P = A\cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Delta}{x}$$

- 从相位变化分析：

$$y_P = A\cos(\omega t + \varphi_0 - \Delta) = A\cos(\omega t + \varphi_0 - 2\pi\frac{x}{\lambda})$$

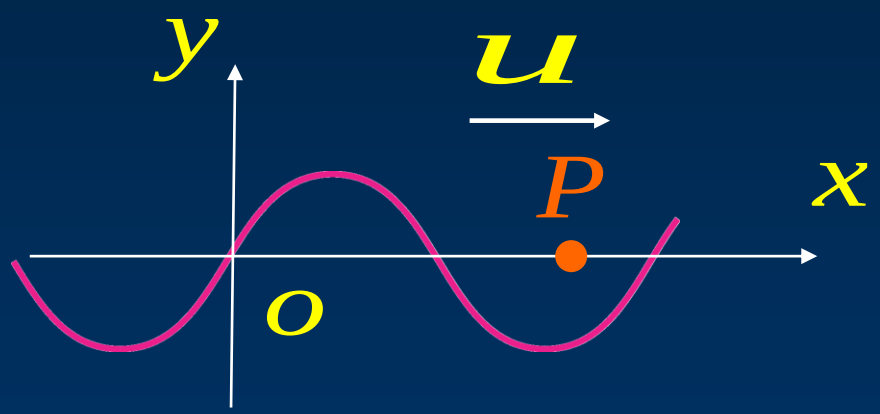
$$y = A\cos(\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0) = A\cos(2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0)$$

$u = \nu\lambda \qquad \omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$ ⇨ **波函数的其它形式**

$$\begin{cases} y(x,t) = A\cos[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi_0] = A\cos[2\pi(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda})+\varphi_0] \\ y(x,t) = A\cos[\dfrac{2\pi}{\lambda}(ut-x)+\varphi_0] \end{cases}$$

2. 波函数的物理意义

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$



1) 振动方程 ⇔ 波函数

当振动质元的位置 x 给定

$$y_P(x_P,t) = A\cos[\omega t+(\varphi_0-\omega\frac{x_P}{u})] = y_P(t)$$

波在传播过程中，任意两质点振动的之间的相位关系：

x_1, x_2 **两质点：**

$$\begin{cases} y_1 = A\cos[\omega(t-\dfrac{x_1}{u})+\varphi_0] \\ y_2 = A\cos[\omega(t-\dfrac{x_2}{u})+\varphi_0] \end{cases}$$

相位差： $\Delta = [\omega(t-\dfrac{x_2}{u})+\varphi_0]-[\omega(t-\dfrac{x_1}{u})+\varphi_0] = \dfrac{\omega}{u}(x_1-x_2)$

$x_2 > x_1, \Delta < 0$，　x_2 **处质点振动相位总落后** x_1 **处质点。**

$\varphi(t,x) = \varphi(t, x+k\lambda)$　**相位是周期性分布的**

$y(t,x) = y(t, x+k\lambda)$　**波具有空间周期性，其特征量为波长**

2）**当** t **给定，** $y = A\cos[\omega(t_0-\dfrac{x}{u})+\varphi_0] = y(x)$ **，** t **时刻的波形**

任一时刻的波形可以描述出各个质元的振动状况

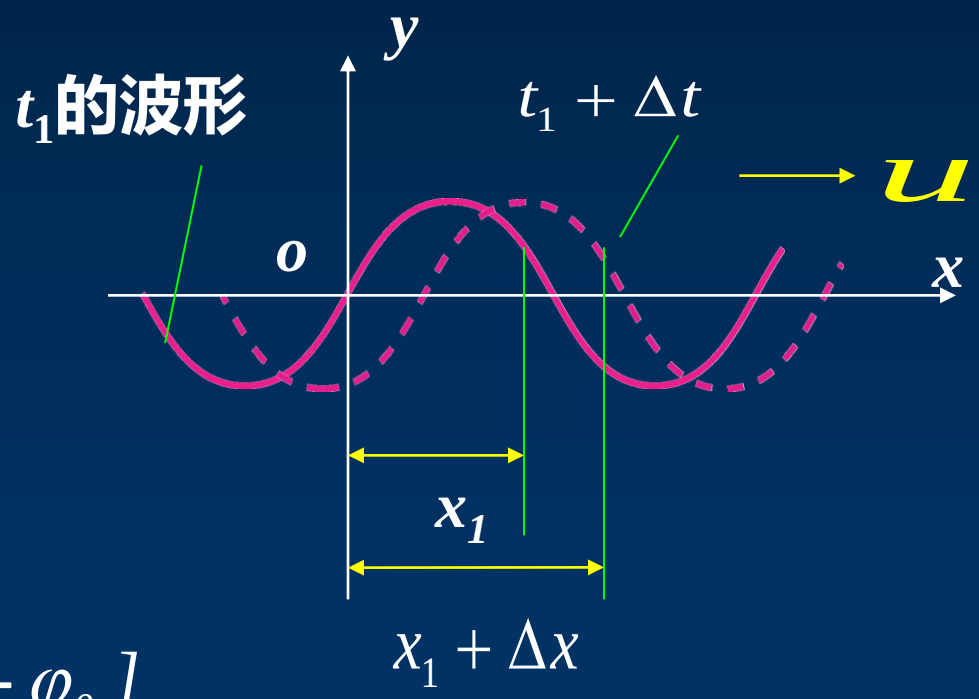
$y(t,x) = y(t+kT, x)$　**波还具有时间周期性，其特征量为周期**

3）波速 u 是振动相位的传播速度：　当位移 y 给定

t_1, x_1，相位为 ⇨ $t_1+\Delta t, x_1+\Delta x$，　相位为

$$\omega\left(t_1-\frac{x_1}{u}\right)=\omega\left(t_1+\Delta t-\frac{x_1+\Delta x}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$



简谐振动的相位以波速传播!

4）若波沿 x 轴负向传播时，
可得到波函数:

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

三、平面简谐波的波动方程

$$y = y(x,t) = A\cos(\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0)$$

分别对坐标和时间求二阶导数

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2}\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

比 较

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

说明

① 是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；

② 不仅适用于机械波，也广泛地适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程；（具有普遍性）

③ 一般，物理量在三维空间中以波的形式传播，若媒质是线性、均匀、各向同性，且无吸收，则波动方程为：

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\xi=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

例1： 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，已知其波函数为

$$y=0.04\cos\pi(50t-0.10x)\ \mathrm{m}$$

求： (1) 波的振幅、波长、周期及波速；

(2) 质点振动的最大速度。

解： (1) *a.* **比较法 (与标准形式比较)**

b. **分析法（由各量物理意义，分析相位关系）**

振幅 $A = y_{\max} = 0.04\ \mathrm{m}$

波长 $\pi(50t - 0.10x_1) - \pi(50t - 0.10x_2) = 2\pi$

$$\lambda = x_2 - x_1 = 20\ \mathrm{m}$$

周期 $\pi(50t_2 - 0.10x) - \pi(50t_1 - 0.10x) = 2\pi$

$$T = t_2 - t_1 = 0.04\ \mathrm{s}$$

波速 $\pi(50t_2 - 0.10x_2) = \pi(50t_1 - 0.10x_1)$

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 500\ \mathrm{m/s}$$

(2) $$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04 \times 50\pi \sin\pi(50t - 0.10x)$$

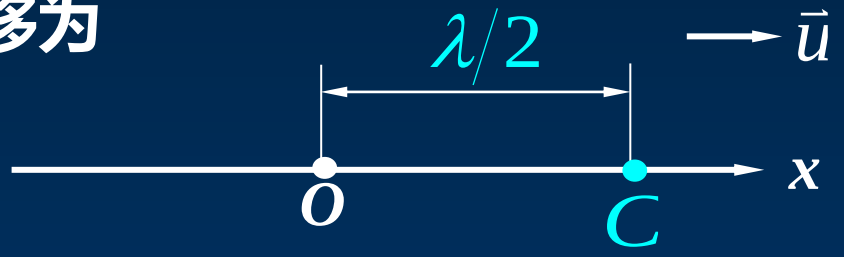
$$v_{\max} = 0.04 \times 50\pi = 6.28\ \mathrm{m/s} \neq u$$

例2： 一列波长为 λ 的平面简谐波沿 x 轴正方向传播。已知在 $x_0=(1/2)\lambda$ 处振动的方程为 $y = A\cos\omega t$

求： 该平面简谐波的波函数

解： 从时间上看，O点在 t 时刻的位移是 C 点在 $t+\dfrac{x_0}{u}$ 时刻位移

原点 O 处在 t 时刻质点的位移为



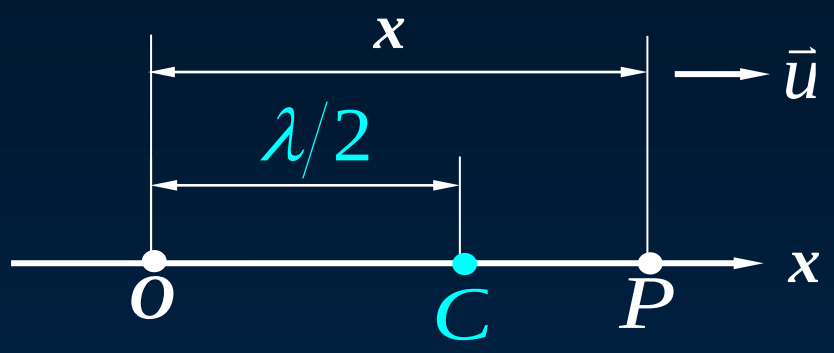
$$y = A\cos\omega(t+\frac{x_0}{u})$$

$$= A\cos\omega(t+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{u}) = A\cos(\omega t+\pi)$$

该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}+\pi)$$

另一解法



已知 C 点振动方程为

$$y = A\cos\omega t$$

从时间上看，P 点在 t 时刻位移是 C 点在 $t-\dfrac{x-(\lambda/2)}{u}$ 时刻的位移

P 点处质点在 t 时刻的位移为

$$y = A\cos\omega[t-\frac{x-(\lambda/2)}{u}]$$

$$= A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}+\pi)$$

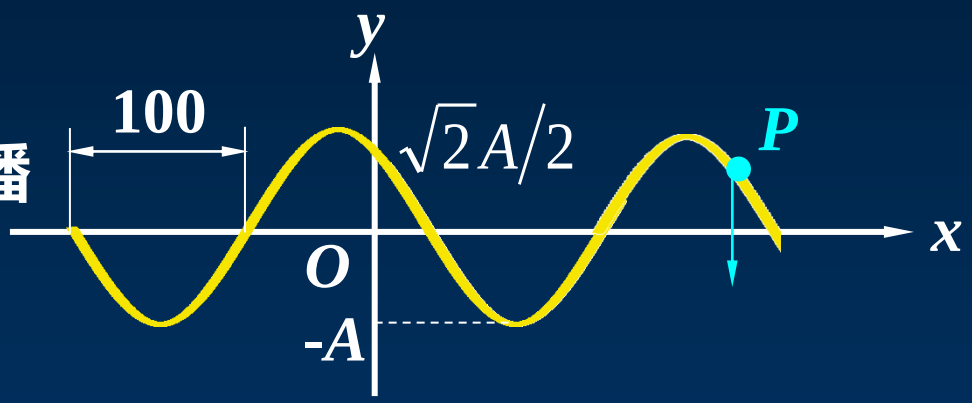
该平面简谐波的波函数为

$$y = A\cos(\omega t - 2\pi\cdot\frac{x}{\lambda}+\pi)$$

例3： 如图所示为一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图，设此简谐波的频率为250Hz，且此时质点 P 的运动方向向下，

求： (1) 该波的波函数；

(2) 在距原点 O 为100米处质点的振动方程与振动速度表达式。



解： (1) P 点振动方向向下，

说明波沿 x 轴负方向传播

$t=0 \qquad x=0$

处的初相位为：$\frac{\pi}{4}$

O点的振动方程 $y=A\cos(2\pi\nu t+\frac{\pi}{4})=A\cos(500\pi t+\frac{\pi}{4})$

该坐标下的波动方程 $y=A\cos[500\pi(t+\frac{x}{5\times10^4})+\frac{\pi}{4}]$

(2) 在距原点 O 为 100 米处质点的振动方程

$$y = A\cos[500\pi(t + \frac{100}{5\times10^4}) + \frac{\pi}{4}]$$

$$= A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$v = 500\pi A\sin(500\pi t + \frac{\pi}{4})$$

14-3 波的能量和强度

一、平面简谐波的能量 、能量密度

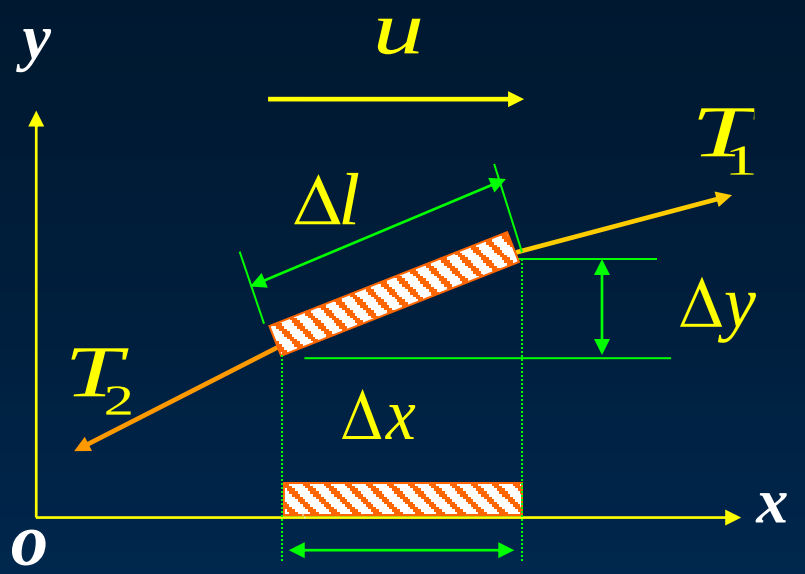
机械波在媒体中传播 ⇒ 质元由静止开始振动

波动是能量传播过程 ⇐ 质点处的媒体也发生形变

以绳索上传播的横波为例:

设波沿 x 方向传播，取线元 $\Delta m = \mu \Delta x$，线元的动能:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\Delta m (\frac{\partial y}{\partial t})^2$$



线元的势能（原长为势能零点）

$$\Delta E_p = T(\Delta l - \Delta x)$$

$$= T\left\{\Delta x[1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + \ldots] - \Delta x\right\}$$

$$\Delta E_P \approx \frac{1}{2} T \Delta x (\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \Delta x[1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]^{1/2}$$

$$\approx \Delta x[1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}$$

机械能： $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_P$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

因为 $T = u^2\mu$

- **质元的动能:**

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta m(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

- **质元的势能:**

$$\Delta E_P = \frac{1}{2}T\Delta x(\frac{\partial y}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

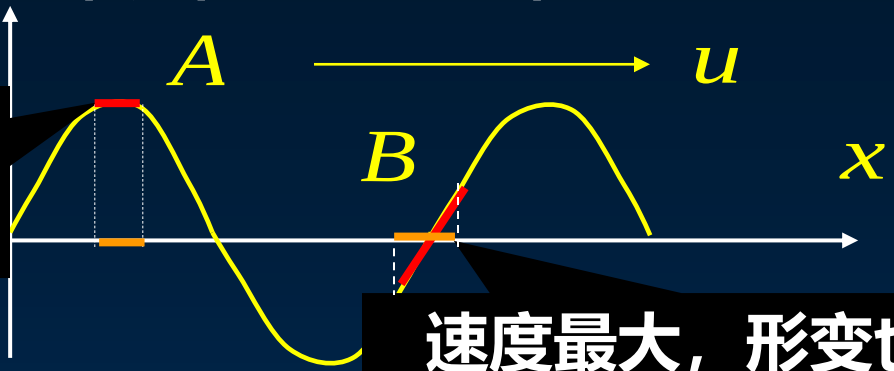
- **质元的机械能:**

$$\Delta E = \mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

讨论：1. 波传播中，质元的动能和势能同步变化。

$\Delta E_k = \Delta E_p$ **与谐振子的能量变化规律截然不同!**

质元的动能、势能同时达到最大，同时达到最小。



速度最小，形变也最小
动能、势能同时达到最小

速度最大，形变也最大
动能、势能同时达到最大

2. 质元的机械能作时空的周期性变化：

$$\Delta E = \mu \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0] = \Delta E(x,t)$$

结果： 波在传播过程中不断吸收和放出能量，故波动是一个能量传播的过程。

3. **简谐波的能量密度**　绳子的横截面为 S，体密度为 ρ

则线元单位体积中的机械能为

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{S\Delta x} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0] = \varepsilon(x,t)$$

二、能流密度和强度

能量密度：$\varepsilon = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

对于某一给定位置，能量密度在一个周期内的平均值：

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

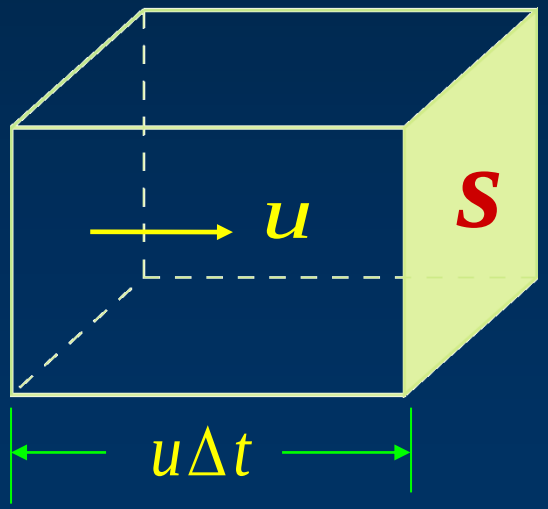
适用于所有的机械波

1. 能流： 单位时间内，通过一定截面的波动能量

$$P = \frac{\varepsilon u \Delta t S}{\Delta t} = \varepsilon u S$$

一个周期内的平均能流为

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P dt = \bar{\varepsilon} u S$$

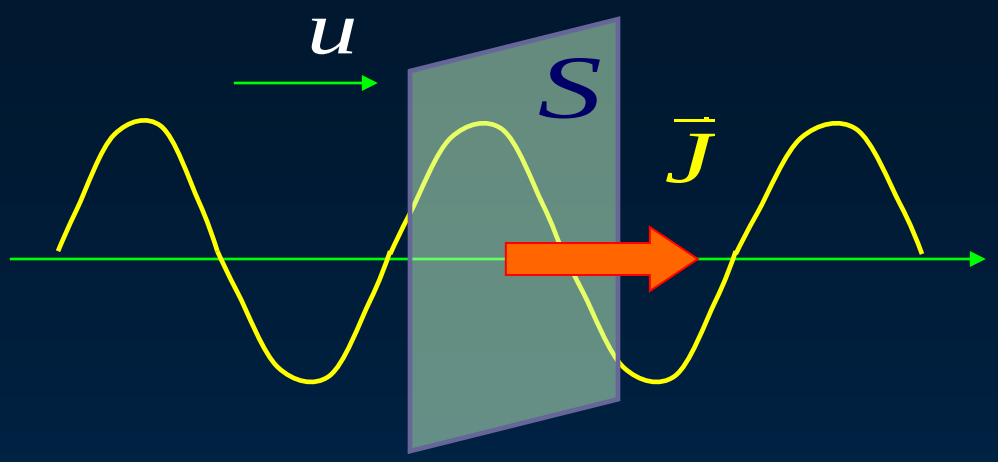


2. 能流密度： 通过垂直于波线截面单位面积上的能流在一个周期内的平均值

大小：$\bar{J}=\dfrac{d\bar{P}}{dS}=\bar{\varepsilon}\cdot\vec{u}$

方向：波动的传播方向。

矢量表示式：$\vec{J}=\bar{\varepsilon}\cdot\vec{u}$



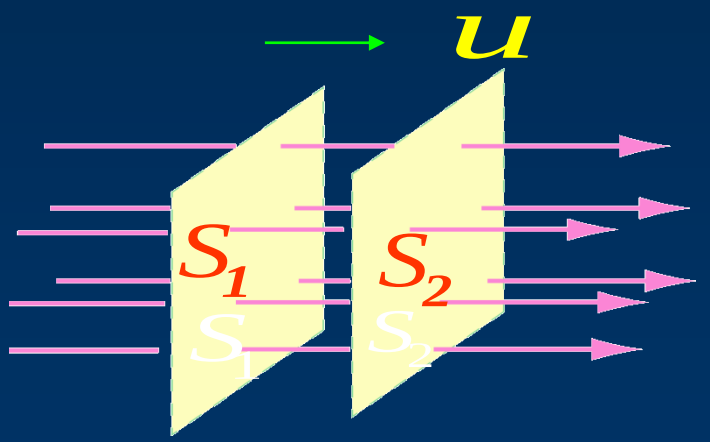
3. **波的强度：** 能流密度反映了波的强弱，也称作---波的强度

$$I=\bar{J}=u\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho A^2u\omega^2$$

- 平面波（媒质不吸收、能量不损失）

$$I_1S_1=I_2S_2=\frac{1}{2}\rho A_2{}^2u\omega^2S_2$$

由 $S_1=S_2$ 知 $A_1=A_2$



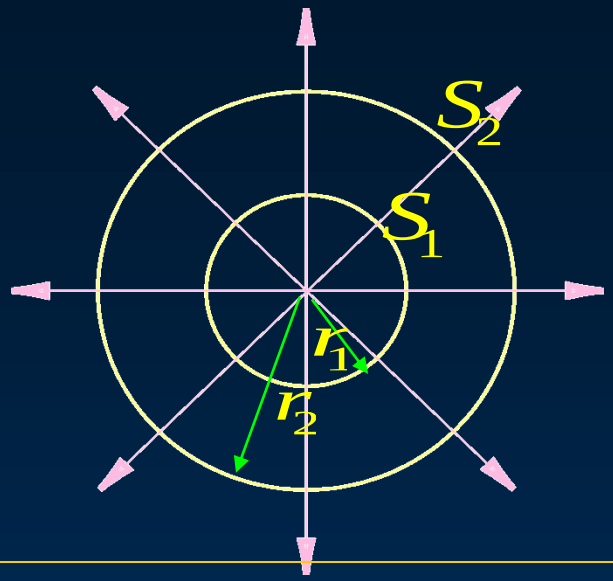
这表明平面波在媒质不吸收的情况下，振幅不变。

- 球面波（媒质不吸收）

由 $\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS_1 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS_2$

知 $A_1^2 \cdot 4\pi r_1^2 = A_2^2 \cdot 4\pi r_2^2$

故 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow A \propto \frac{1}{r}$



为离原点（波源）单位距离处波的振幅

得球面波的波函数：

$$y(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos[\omega(t-\frac{r}{u})+\varphi_0]$$

球面波的振幅A在媒质不吸收的情况下也随r增大而减小。

三、波的吸收